Des symétries continues aux théorèmes de Noether

R. L.

Colloque Cathy Dufour 2016

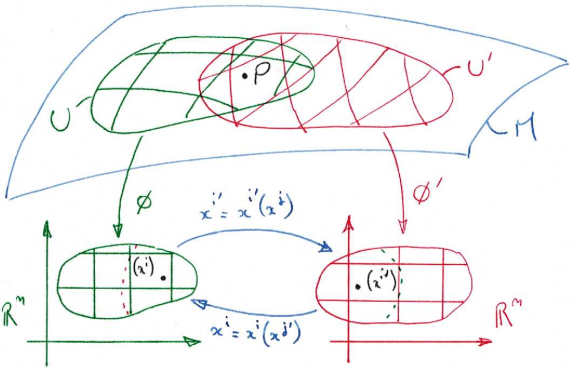
Symétries, invariances et classifications (sic)

Plan

1. Les symétries continues
   - Transformations et symétries continues, points de vue actif et passif
   - Notion de symétrie de Lie, réduction et intégrales premières d'une EDO
   - Le groupe de Galilée et ses 10 intégrales premières
2. Principes variationnels et symétries (« cas mécanique »)
   - Principe variationnel de Hamilton et équations d'Euler-Lagrange
   - « Le » théorème de Noether en mécanique
   - Une « symétrie atypique » : l'invariance paramétrique
3. Les théorèmes de Noether
   - Cadre général et identité fondamentale de Noether
   - Courant et charge de Noether
   - Le 2^{e} théorème : identités de Bianchi et lois de conservation impropres
4. Le problème des lois de conservation en relativité générale
   - Matière en espace courbe rigide
   - Relativité et invariance générales
   - Le problème du tenseur énergie-impulsion

Les systèmes de coordonnées

Hypothèse : la physique se joue sur un substrat M, variété (lisse, réelle) de dim. finie n. La variété M admet partout (localement) des **systèmes de coordonnées** (cartes).

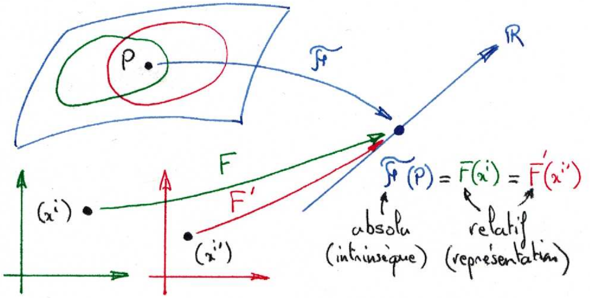


Si $\mathrm{P} \in U \cap U'$ alors P admet des coordonnées $\phi(\mathrm{P}) = (x^1, \ldots, x^n) = (x^i)$ dans la carte (U, ϕ) et $\phi'(\mathrm{P}) = (x^{1'}, \ldots, x^{n'}) = (x^{i'})$ dans la carte (U', ϕ').

Représentations en coordonnées (cas des scalaires)

Scalaire : application (lisse) $\mathscr{F} : M \to \mathbb{R}$. Dans une carte (ϕ, U) elle est représentée par une fonction à n variables F telle que

$$\forall P \in U, \quad F(x^i) = \mathscr{F}(P) \quad \text{où} \quad (x^i) = \phi(P).$$



On reconnaît en $\boxed{F(x^i) = F'(x^{i'})}$ la loi de transformation d'un scalaire.

Représentations en coordonnées (cas plus généraux)

- **Les vecteurs.** Les (champs de) vecteurs ξ sur M évaluent les variations des scalaires dans la direction qu'ils définissent et s'écrivent localement

$$\xi = \xi^i(x^j)\frac{\partial}{\partial x^i} = \xi^{i'}(x^{j'})\frac{\partial}{\partial x^{i'}} \quad \text{(convention de sommation d'Einstein)}$$

dans les systèmes de coordonnées (x^i) et $(x^{i'})$. D'où la loi de transformations des (composantes de) vecteurs :

$$\boxed{\xi^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j}\xi^j}$$

- **Les tenseurs plus généraux.** Ce sont les objets géométriques « absolus » que manipulent couramment les physiciens. Par exemple, une métrique sur M est donnée par un certain (champ de) tenseur(s)

$$\mathrm{g} = g_{ij}(x^k)\,\mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j = g_{i'j'}(x^{k'})\,\mathrm{d}x^{i'} \otimes \mathrm{d}x^{k'}.$$

D'où la loi de transformation des composantes :

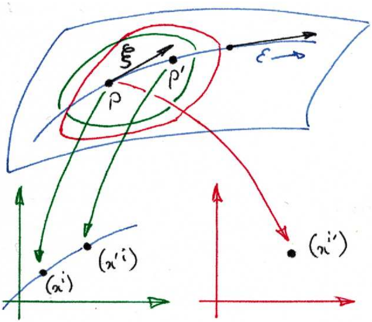
$$\boxed{g_{i'j'} = \frac{\partial x^k}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^l}{\partial x^{j'}}g_{kl}}$$

Transformations continues, points de vue actif et passif

Une transformation continue T_ε à un paramètre ε revient à la donnée d'un champ de vecteurs (générateur) ξ sur M qui « entraîne » les points de M :

$$T_\varepsilon : P = P(0) \longmapsto P' = P(\varepsilon).$$

Les systèmes de coordonnées offrent deux points de vue pour T_ε.



- **Point de vue actif :** représentation de T_ε dans un système de coordonnées :

$$x^i \longmapsto x'^i = x^i + \varepsilon \xi^i + O(\varepsilon^2) \qquad (\star)$$

Le point se meut relativement à un observateur fixe.

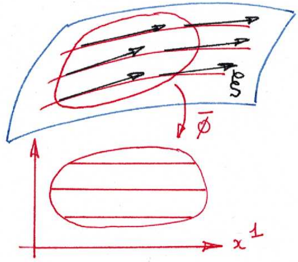
- **Point de vue passif :** $(\star)$ est compris comme un changement de coordonnées $x^i \to x^{i'} := x'^i$. L'observateur se meut relativement à un point fixe.

Symétries continues (cas des scalaires)

Une transformation continue T_ε générée par ξ est une **symétrie (continue)** d'un scalaire $\mathscr{F}$ si elle laisse les valeurs de $\mathscr{F}$ invariantes :

$$\boxed{\mathscr{F}(\mathrm{P}') = \mathscr{F}(\mathrm{P})}$$

Caractérisation : $\boxed{\xi(\mathscr{F}) = 0}$, la dérivée de $\mathscr{F}$ est nulle dans la direction ξ.



On peut déterminer localement un système de coordonnées (y^i), dit **adapté** à ξ, tel que

$$\xi = \frac{\partial}{\partial y^1}\,.$$

Les lignes coordonnées de y^1 coïncident alors localement avec les courbes intégrales de ξ.

$\xi(\mathscr{F}) = 0 \implies$ le représentant F de $\mathscr{F}$ dans le système adapté ne dépend pas de y^1 (y^1 est une **variable ignorable** pour F). La symétrie apporte une **simplification** (c'est ce qu'on attend d'une symétrie).

Symétries continues (cas des scalaires) et points de vue

Traduite en coordonnées, la symétrie

$$\mathscr{F}(\mathrm{P}) = \mathscr{F}(\mathrm{P}')$$

offre deux visions :

- **Vision active :** $F(x'^i) = F(x^i)$, **invariance en valeur** du représentant.
- **Vision passive :**

$$\begin{aligned} F'(x'^i) &= F'(x^{i'}) && \text{(transformation passive } x^i \to x^{i'} = x'^i\text{)} \\ &= F(x^i) && \text{(représentation scalaire)} \\ &= F(x'^i) && \text{(symétrie)} \end{aligned}$$

$\Longrightarrow \; F = F'$: **invariance fonctionnelle** entre un représentant et son transformé.

Transformations d'espace et de temps

Hypothèse : dynamique sur M (« l'espace ») paramétrée par une variable indépendante t (« le temps »). Transformations d'espace-temps (au 1er ordre) :

$$t \longrightarrow t' = t + \underbrace{\varepsilon \xi^0(t, x^j)}_{\delta t} \quad , \quad x^i \longrightarrow x'^i = x^i + \underbrace{\varepsilon \xi^i(t, x^j)}_{\delta x^i}$$

avec pour générateur

$$\xi = \xi^0(t, x^j) \frac{\partial}{\partial t} + \xi^i(t, x^j) \frac{\partial}{\partial x^i} \, .$$

Une fonction d'espace-temps $F(t, x^i)$ est un **invariant** de ξ si

$$\boxed{F(t, x^i) = F(t', x'^i) \quad \text{c.-à-d.} \quad \xi(F) = 0}$$

$\Longrightarrow$ ξ définit une variable ignorable (d'espace ou de temps) partagée par tous ses invariants.

Prolongement cinématique

Une transformation de l'espace et du temps engendrée par ξ induit naturellement une transformation des vitesses, accélérations, etc. :

$$\dot{x}^i = \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t} \longrightarrow \dot{x}'^i = \frac{\mathrm{d}x'^i}{\mathrm{d}t'} \quad , \quad \ddot{x}^i = \frac{\mathrm{d}\dot{x}^i}{\mathrm{d}t} \longrightarrow \ddot{x}'^i = \frac{\mathrm{d}\dot{x}'^i}{\mathrm{d}t'} \quad , \quad \text{etc.}$$

Ainsi l'action de ξ se prolonge à toute fonction de t, x^i, $\dot{x}^i$, $\ddot{x}^i$, etc. via

$$F(t', x'^i, \dot{x}'^i, \ddot{x}'^i, \dots) = F(t, x^i, \dot{x}^i, \ddot{x}^i, \dots) + \varepsilon \xi\big(F(t, x^i, \dot{x}^i, \ddot{x}^i, \dots)\big)$$

La condition d'invariance est toujours

$$\boxed{\xi(F) = 0}$$

$\Longrightarrow$ Là encore, tous les invariants F de ξ ne dépendent pas de la variable ignorable définie par ξ (quoiqu'ils peuvent dépendre de ses dérivées si la variable ignorable est une coordonnée d'espace).

Application aux EDO : bref aperçu de la théorie de Lie

On considère un problème dynamique à une seule variable dépendante x devant vérifier une EDO d'ordre k

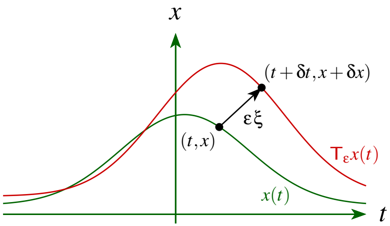
$$\Delta(t, x, x_1, \ldots, x_k) = 0. \qquad (\star)$$

Symétrie de Lie d'une EDO

ξ est une **symétrie de Lie** de $(\star)$ si elle laisse l'équation invariante :

$$\xi(\Delta) = 0 \text{ dès lors que } \Delta = 0.$$

Vision active : T_ε transforme une solution en une autre solution.



Application aux EDO : très bref aperçu de la théorie de Lie

Problème dynamique à une seule variable dépendante x devant vérifier une EDO d'ordre k

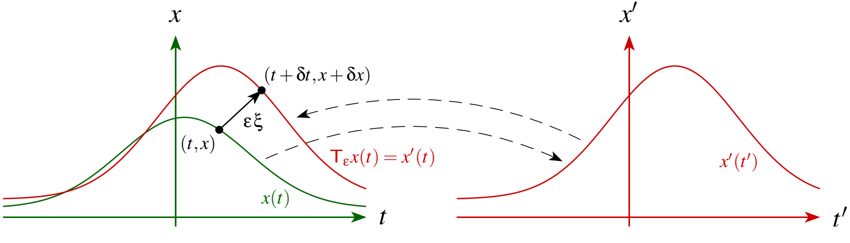
$$\Delta(t, x, x_1, \ldots, x_k) = 0 \qquad (\star)$$

Symétrie de Lie d'une EDO

ξ est une **symétrie de Lie** de $(\star)$ si elle laisse l'équation invariante :

$$\xi(\Delta) = 0 \text{ dès lors que } \Delta = 0.$$

Vision passive : l'EDO est invariante sous le changement $(t, x) \to (t', x')$.



Application aux EDO : très bref aperçu de la théorie de Lie

Théorème

Soit ξ une symétrie de Lie de l'EDO d'ordre k

$$\Delta(t, x, x_1, \ldots, x_k) = 0 \tag{$\star$}$$

et soient $s(t,x)$, $y(t,x,x_1)$ des invariants d'ordre 0 et 1 de ξ, respectivement. Alors $(\star)$ se réduit à une EDO équivalente d'ordre $k-1$

$$\widetilde{\Delta}(s, y, y_1, \ldots, y_{k-1}) = 0.$$

La symétrie permet de **réduire l'ordre** d'une EDO de **1**. L'ensemble des symétries d'une EDO forme une algèbre de Lie et si le groupe de Lie correspondant est résoluble alors l'EDO est résoluble par quadratures.

Le cas des EDO d'ordre 2

Si ξ est une symétrie de Lie de $\Delta(t,x,\dot{x},\ddot{x}) = 0$ alors

$$\Delta(t,x,\dot{x},\ddot{x}) = 0 \iff \widetilde{\Delta}(s,y,\dot{y}) = 0$$

avec s et y des invariants d'ordre 0 et 1 de ξ. En intégrant l'EDO réduite on obtient une relation

$$G(s,y) = C$$

donc une **intégrale première**

$$I(t,x,\dot{x}) \coloneqq G(s(t,x),y(t,x,\dot{x})) \doteq C,$$

i.e. I est une quantité qui se conserve le long des solutions $x(t)$. Par construction, I est un invariant d'ordre 1 de ξ : du point de vue actif, ξ transforme toute solution en une autre solution « étiquetée » par la **même valeur** de I.

Un exemple : l'oscillateur harmonique

Équation du mouvement de l'oscillateur harmonique :

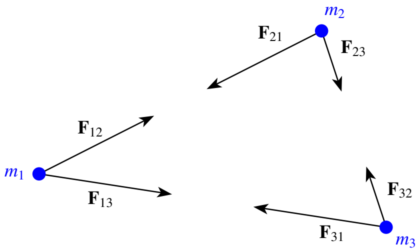
$$\ddot{x} + x = 0.$$

Son groupe de symétrie est SL$(3,\mathbb{R})$, de dimension 8.

Symétrie de Lie	Intégrale première
$\xi_1 = \partial_t$	$I_1 = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}\left(I_3^2 + I_4^2\right)$
$\xi_2 = x\partial_x$	$I_2 = t + \arctan(\dot{x}/x) = -I_4/I_3$
$\xi_3 = \sin(t)\partial_x$	$I_3 = \dot{x}\sin(t) - x\cos(t)$
$\xi_4 = \cos(t)\partial_x$	$I_4 = \dot{x}\cos(t) + x\sin(t)$
$\xi_5 = \sin(2t)\partial_t + x\cos(2t)\partial_x$	$I_5 = (\dot{x}^2 - x^2)\sin(2t) - 2\dot{x}x\cos(2t) = 2I_3I_4$
$\xi_6 = \cos(2t)\partial_t - x\sin(2t)\partial_x$	$I_6 = (\dot{x}^2 - x^2)\cos(2t) + 2\dot{x}x\sin(2t) = I_4^2 - I_3^2$
$\xi_7 = x\sin(t)\partial_t + x^2\cos(t)\partial_x$	$I_7 = I_2 = -I_4/I_3$
$\xi_8 = x\cos(t)\partial_t - x^2\sin(t)\partial_x$	$I_8 = I_2 = -I_4/I_3$

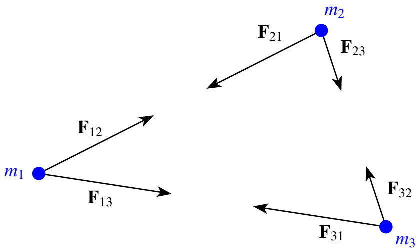
Le groupe de Galilée et ses dix intégrales premières

- Espace de la mécanique newtonienne : espace affine euclidien usuel à 3 dimensions.
- Situation archétypale : points matériels formant un système isolé (c.-à-d. sans interaction avec le reste de l'univers) en interaction deux-à-deux (forces).



Le groupe de Galilée et ses dix intégrales premières

- Espace de la mécanique newtonienne : espace affine euclidien usuel à 3 dimensions.
- Situation archétypale : points matériels formant un système isolé (c.-à-d. sans interaction avec le reste de l'univers) en interaction deux-à-deux (forces).



Homogénéité temporelle

Invariance sous les translations dans le temps.

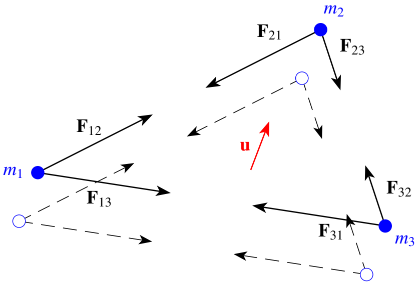
$\Longrightarrow$ Conservation de l'**énergie totale**

$$\boxed{E = T + V}$$

T : énergie cinétique totale ; V énergie potentielle totale (dont dérivent les forces).

Le groupe de Galilée et ses dix intégrales premières

- Espace de la mécanique newtonienne : espace affine euclidien usuel à 3 dimensions.
- Situation archétypale : points matériels formant un système isolé (c.-à-d. sans interaction avec le reste de l'univers) en interaction deux-à-deux (forces).



Homogénéité spatiale

Invariance sous les translations dans l'espace.

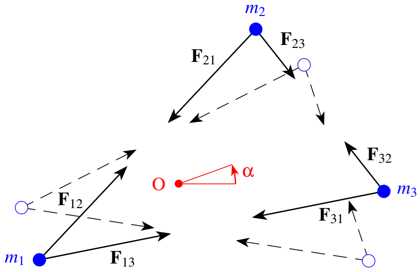
$\Longrightarrow$ Conservation de l'**impulsion totale**

$$\boxed{\mathbf{P} = \sum_a \mathbf{p}_a = \sum_a m_a \dot{\mathbf{r}}_a = M\dot{\mathbf{R}}}$$

M : masse totale ; $\mathbf{R}$: position du centre de masse (barycentre).

Le groupe de Galilée et ses dix intégrales premières

- Espace de la mécanique newtonienne : espace affine euclidien usuel à 3 dimensions.
- Situation archétypale : points matériels formant un système isolé (c.-à-d. sans interaction avec le reste de l'univers) en interaction deux-à-deux (forces).



Isotropie

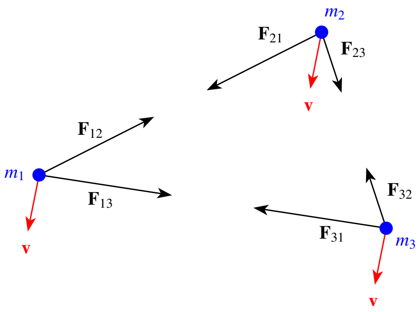
Invariance sous les rotations.
$\Longrightarrow$ Conservation du **moment cinétique total**

$$\boxed{\mathbf{L} = \sum_a \mathbf{r}_a \times \mathbf{p}_a = \sum_a m_a \mathbf{r}_a \times \dot{\mathbf{r}}_a}$$

par rapport à un point fixe O quelconque.

Le groupe de Galilée et ses dix intégrales premières

- Espace de la mécanique newtonienne : espace affine euclidien usuel à 3 dimensions.
- Situation archétypale : points matériels formant un système isolé (c.-à-d. sans interaction avec le reste de l'univers) en interaction deux-à-deux (forces).



« Boosts » galiléens

Invariance sous l'ajout d'une vitesse fixée (changement de référentiel galiléen).

$\Longrightarrow$ Conservation du vecteur

$$\boxed{\mathbf{C} = \mathbf{R} - \dot{\mathbf{R}}t}$$

dont la valeur retient la position du centre de masse à $t = 0$.

Plan

Le principe variationnel de Hamilton

Principe de Hamilton

Le mouvement d'un système à n degrés de liberté représentés par des coordonnées $(q^i) = (q^1, \ldots, q^n)$ dans un espace (appelé **espace des configurations**) obéit au principe de Hamilton si, entre deux instants quelconques t_1 et t_2, il rend stationnaire une **fonctionnelle d'action**

$$S[q(t)] = \int_{t_1}^{t_2} L(t, q(t), \dot{q}(t))\,\mathrm{d}t$$

sous les variations verticales infinitésimales des coordonnées s'annulant aux extrémités de temps t_1 et t_2. La fonction L est un **lagrangien** du problème.

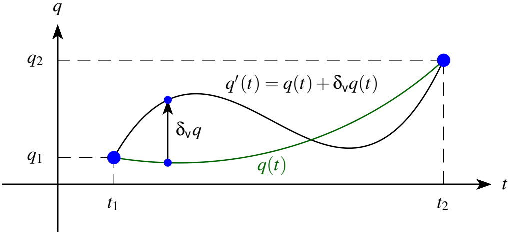
Exemple : le système de points matériels évoqué précédemment obéit au principe de Hamilton pour le lagrangien standard de la mécanique

$$\boxed{L = T - V}$$

Dans la majorité des cas, la solution minimise l'action : la trajectoire réalise le « meilleur compromis » entre les deux formes d'énergie : cinétique et potentielle.

Les équations d'Euler-Lagrange

Sous une variation verticale s'annulant aux extrémités :



on a au premier ordre (après un développement de Taylor et une IPP)

$$\delta_{\mathsf{v}} S = S[q'^i(t)] - S[q^i(t)] = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right] \delta_{\mathsf{v}} q^i(t)\, \mathrm{d}t + \cancel{\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta_{\mathsf{v}} q^i(t) \right]_{t_1}^{t_2}}.$$

Ceci étant vrai pour toute variation verticale $\delta_{\mathsf{v}} q$ s'annulant aux extrémités, le principe de Hamilton revient aux **équations d'Euler-Lagrange** (E.-L.)

$$\boxed{\delta_{\mathsf{v}} S = 0 \iff E_i(L) = 0} \quad \text{avec} \quad \boxed{E_i := \frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}} \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

Invariance/covariance des équations d'Euler-Lagrange

- **Invariance de jauge lagrangienne.**

Principe de Hamilton invariant sous l'ajout d'un terme de bord

$$S[q(t)] = \int L\,\mathrm{d}t \longrightarrow \widetilde{S}[q(t)] = \int (L + \dot{\Lambda})\,\mathrm{d}t = S[q(t)] + \text{bord.}$$

Ainsi, L et $L + \dot{\Lambda}$ sont des lagrangiens équivalents (liberté de jauge).

- **Covariance sous les changements de variables.**

Sous $(t, q^i) \to (t', q^{i'})$ on transforme L en L' de sorte à préserver $L\,\mathrm{d}t$

$$L\,\mathrm{d}t = L'\,\mathrm{d}t'$$

et donc l'action :

$$S'[q'(t')] = \int_{t'_1}^{t'_2} L'\,\mathrm{d}t' = \int_{t_1}^{t_2} L\,\mathrm{d}t = S[q(t)].$$

En appliquant le principe de Hamilton à S' on obtient alors

$$\delta_{\mathrm{v}} S' = 0 \iff \mathsf{E}_{i'}(L') = 0 \quad \text{avec} \quad E_{i'} := \frac{\partial}{\partial q^{i'}} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}\frac{\partial}{\partial \dot{q}^{i'}}\,.$$

Les intégrales premières manifestes

- À chaque q^i est associé un **moment conjugué** p_i via L : $\boxed{p_i := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}}$

$\Longrightarrow$ écriture « à la Newton » des équations d'E.-L. :

$$E_i(L) = 0 \iff \dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q^i}$$

$\Longrightarrow$ si L ne dépend pas de q^1 par exemple alors p_1 est une grandeur conservée (q^1 est dite cyclique, ou ignorable, ou absente, ou kinosthénique, ou etc.).

- Si L ne dépend pas du temps alors l'**hamiltonien** est conservé :

$$\boxed{H := p_i \dot{q}^i - L}$$

De façon standard, H coïncide avec l'**énergie**. Dans une certaine mesure, $-H$ peut être considéré comme le moment conjugué au temps.

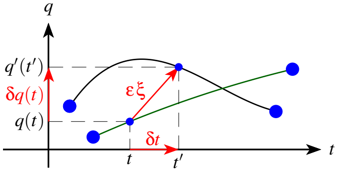
Invariance et théorème de Noether en mécanique

Symétrie de Noether

Transformation infinitésimale

$$t \longrightarrow t' = t + \varepsilon \xi^0 \quad , \quad q^i \longrightarrow q'^i = q^i + \varepsilon \xi^i$$

qui laisse invariante l'action à un terme de bord près.



Il doit donc exister une certaine fonction Λ telle que

$$\delta S = S[q'(t')] - S[q(t)] = \varepsilon \int_{t_1}^{t_2} \dot{\Lambda}\, \mathrm{d}t . \qquad (\star)$$

En manipulant $(\star)$ on obtient

$$(\star) \iff (\xi^i - \dot{q}^i \xi^0) E_i(L) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\xi^0 H - \xi^i p_i + \Lambda\right) \equiv 0$$ (**id. fond. de Noether**)

Invariance et théorème de Noether en mécanique

1er théorème de Noether (« cas mécanique »)

Si ξ est une symétrie de Noether à terme de bord $\dot{\Lambda}$ près alors

$$\boxed{I := \xi^0 H - \xi^i p_i + \Lambda \quad \text{est une grandeur conservée}}$$

La réciproque est vraie : si I est une intégrale première alors il existe une symétrie de Noether qui l'engendre.

Vision passive d'une symétrie de Noether :

$$\begin{aligned} S[q'(t')] &= S[q(t)] \quad \text{mod bord} \quad \text{(symétrie)} \\ &= S'[q'(t)] \quad \text{mod bord} \quad \text{(transformation passive des coordonnées)} \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ invariance de la formulation variationnelle dans les deux jeux de coordonnées modulo un terme de bord sans signification.

$\Longrightarrow$ **Toute symétrie de Noether laisse invariante les équations d'E.-L.**

Manifestation du principe de Curie : la symétrie de la cause (action) se retrouve dans ses conséquences (équations d'E.-L.)

Une « symétrie atypique » : l'invariance paramétrique

Question : à quelle(s) conditions une formulation variationnelle est-elle indépendante du paramétrage choisi ?

$\Longrightarrow$ invariance réclamée sous $t \longrightarrow t + \varepsilon\xi^0 \quad , \quad q^i \to q^i, \quad \forall \xi^0.$

- Application du 1er théorème de Noether : $H\xi^0 \doteq$ cte. $\quad \forall \xi^0 \Longrightarrow \boxed{H \doteq 0}$
- Mais l'identité fondamentale de Noether s'écrit

$$\dot{q}^i E_i(L)\xi^0 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(H\xi^0\right) \equiv 0. \qquad (\star)$$

En se restreignant aux variations qui s'annulent sur le bord, on obtient non pas une intégrale première mais une **identité** :

$\boxed{\dot{q}^i E_i(L) \equiv 0}$ (**les équations d'E.-L. ne sont pas toutes indépendantes**)

- Mais on peut encore écrire $(\star)$ sous la forme

$$\left(\dot{q}^i E_i(L) + \dot{H}\right)\xi^0 + H\dot{\xi}^0 \equiv 0 \quad \forall \xi^0 \Longrightarrow \dot{q}^i E_i(L) + \dot{H} \equiv 0 \text{ et } H \equiv 0.$$

$\Longrightarrow \boxed{\frac{\partial L}{\partial t} \equiv 0}$ et $\boxed{\dot{q}^i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - L \equiv 0}$ (homogénéité de degré 1 en les $\dot{q}^i$).

Une « symétrie atypique » : l'invariance paramétrique

Théorème (représentation paramétrique de Weierstrass)

L'intégrale d'action

$$S[q(t)] = \int L \mathrm{d}t$$

est invariante sous toute reparamétrisation ssi L ne dépend pas de t et est homogène de degré 1 en les vitesses. Auquel cas les équations d'Euler-Lagrange sont liées par l'identité $\dot{q}^i E_i(L) \equiv 0$.

Commentaire : dans une théorie où il n'y a pas de temps absolu, une action bien formulée doit répondre au critère d'invariance paramétrique. En relativité, par exemple, une particule relativiste libre est régie par l'action invariante

$$\int \sqrt{g_{\mu\nu}(x)\,\mathrm{d}x^\mu\,\mathrm{d}x^\nu} = \int \sqrt{g_{\mu\nu}(x)\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu}\,\mathrm{d}t$$

Le problème est **purement géométrique**, il s'agit de déterminer les géodésiques de l'espace-temps : le paramétrage est **indifférent** (voir aussi le principe de Jacobi).

Plan

Le cadre général du papier de Noether

Invariante Variationsprobleme, *Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-physikalische Klasse* (1918) pp. 235–257.

Objet d'étude

Noether s'intéresse aux conséquences de l'invariance d'une fonctionnelle d'action très générale (d'ordre fini)

$$S[\psi(x^\mu)] = \int_\Omega \mathfrak{L}(x^\mu, \psi^i, \psi^i_{,\mu}, \psi^i_{,\mu\nu}, \dots)\, \mathrm{d}^n x$$

sous un groupe de transformations infinitésimales des variables indépendantes (ici ce sont les n coordonnées x^μ de l'espace considéré) et des variables dépendantes (des champs ψ^i en nombre fini).

Le cadre général du papier de Noether

Sous une transformation infinitésimale des coordonnées et des champs

$$x^\mu \longrightarrow x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu \quad , \quad \psi^i(x) \longrightarrow \psi'^i(x') = \psi^i(x) + \delta\psi^i,$$

la variation de l'action va pouvoir être mise sous la forme

$$\boxed{\delta S = \int_\Omega \Big[E_i(\mathfrak{L})\delta_{\mathrm{v}}\psi^i - \mathrm{d}_\mu(\delta B^\mu) \Big] \, \mathrm{d}^n x}$$

- $E_i(\mathfrak{L})$: « **expressions de Lagrange** » (*Lagrangenschen Ausdrücke*). Elles sont telles que les équations du mouvement obtenues par le principe de Hamilton sont $E_i(\mathfrak{L}) = 0$;
- d_μ : dérivation totale par rapport à x^μ, $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^\mu} = \dfrac{\partial}{\partial x^\mu} + \psi^i{}_{,\mu}\dfrac{\partial}{\partial \psi^i} + \ldots$
- $\delta_{\mathrm{v}} = \delta - \delta x^\mu \, \mathrm{d}_\mu$: variation verticale associée à δ, telle que par exemple

$$\delta_{\mathrm{v}}\psi^i(x) = \psi'^i(x) - \psi^i(x).$$

- δB^μ : vecteur infinitésimal définissant le terme de bord.

L'identité fondamentale de Noether

La transformation est une **symétrie de Noether** si elle laisse l'action invariante à un terme de bord près :

$$\delta S = \int_\Omega \mathrm{d}_\mu(\delta\Lambda^\mu)\,\mathrm{d}^n x.$$

Historiquement, Noether ne traite que de l'invariance ($\delta S = 0$). On trouve pour la première fois l'invariance à terme de bord près dans E. Bessel-Hagen (1921) mais cette idée lui est venue de Noether comme il l'écrit dans son papier (*Ich verdanke diese einer mündlichen Mitteilung von Fraülein Emmy Noether*). Bref :

$$\delta S = \int_\Omega \left[E_i(\mathfrak{L})\delta_{\mathrm{v}}\psi^i - \mathrm{d}_\mu(\delta B^\mu)\right]\mathrm{d}^n x \underbrace{=}_{\text{hyp.}} \int_\Omega \mathrm{d}_\mu(\delta\Lambda^\mu)\,\mathrm{d}^n x$$

$$\underset{\forall\Omega}{\Longrightarrow} \underbrace{\boxed{E_i(\mathfrak{L})\delta_{\mathrm{v}}\psi^i - \mathrm{d}_\mu(\delta B^\mu + \delta\Lambda^\mu) \equiv 0}}_{\textbf{identité fondamentale de Noether}}$$

Cette identité est à la source des deux théorèmes de Noether.

Le premier théorème de Noether

De l'identité fondamentale

$$E_i(\mathfrak{L})\delta_\nu\psi^i - \mathrm{d}_\mu(\delta B^\mu + \delta\Lambda^\mu) \equiv 0$$

découle directement le premier théorème de Noether dont l'énoncé original (sur la base de la traduction de Meersseman) est

Premier théorème de Noether

Si l'intégrale [d'action] est invariante [sous] un groupe [continu à ρ paramètres] $\mathfrak{G}_\rho$ alors il y a ρ **combinaisons linéairement indépendantes entre les expressions lagrangiennes qui deviennent des divergences** — et réciproquement, il résulte de [ceci] l'invariance de [l'intégrale] sous un groupe $\mathfrak{G}_\rho$.

En outre, on obtient pour chaque symétrie une **relation de divergence** (*Divergenzgleichungen*), ou **loi de conservation** (*Erhaltungssätze*) lorsque les équations d'E.-L. sont vérifiées :

$$\boxed{\mathrm{d}_\mu \mathrm{j}^\mu \doteq 0} \quad \text{où} \quad \boxed{\mathrm{j}^\mu := \delta B^\mu + \delta\Lambda^\mu}$$

est le **courant de Noether** associé à la symétrie.

Du courant à la charge de Noether dans un espace-temps

Dans un espace-temps décrit par 1 coordonnée de temps $x^0 = t$ et 3 d'espace, $(x^1, x^2, x^3) = \mathbf{x}$, une loi de conservation est une **équation de continuité** :

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \iff \partial_t \rho + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad \text{avec} \quad \rho := j^0 \quad \text{et} \quad \mathbf{j} := (j^1, j^2, j^3).$$

Terminologie adoptée :

- ρ : **densité de charge**,
- $\mathbf{j}$: **densité de courant** (spatial).

Interprétation : la variation dans le temps de la charge contenue dans une région spatiale V est entièrement due au flux de $\mathbf{j}$ à travers la surface qui délimite la région (pas de sources de charge dans V). Si, pour une région donnée, le flux s'annule (« système fermé ») alors la charge qu'elle contient

$$\boxed{Q = \int_V \rho \, \mathrm{d}^3 x = \int_V j^0 \, \mathrm{d}^3 x}$$

reste invariante dans le temps. On parle alors de **charge de Noether**.

Le deuxième théorème de Noether

- Il concerne le cas particulier où la symétrie dépend d'une fonction infinitésimale arbitraire $\varepsilon(x)$ et de ses dérivées jusqu'à un certain ordre σ. Exemple :

$$\delta_{\mathrm{v}}\psi^i = a_0^i\varepsilon(x) - a_1^{i\mu}\partial_\mu\varepsilon(x) + \cdots + (-1)^\sigma a_\sigma^{i\mu_1\ldots\mu_\sigma}\partial_{\mu_1\ldots\mu_\sigma}\varepsilon(x).$$

- Le 1er théorème apporte une infinité de lois de conservation, une pour chaque choix de $\varepsilon(x)$. Quel sens leur accorder ? Noether recherche des résultats indépendants de ce choix. En utilisant la règle de Leibniz autant de fois qu'il le faut sur le premier terme de l'identité de Noether,

$$E_i(\mathfrak{L})\delta_{\mathrm{v}}\psi^i - \mathrm{d}_\mu(\delta B^\mu + \delta\Lambda^\mu) = 0,$$

elle se met, $\forall\varepsilon(x)$, sous la forme

$$\underbrace{\Big(a_0^i E_i(\mathfrak{L}) + \mathrm{d}_\mu\left[a_1^{i\mu}E_i(\mathfrak{L})\right] + \mathrm{d}_{\mu_1}\ldots\mathrm{d}_{\mu_\sigma}\left[a_\sigma^{i\mu_1\ldots\mu_\sigma}E_i(\mathfrak{L})\right]\Big)\varepsilon(x)}_{\text{intérieur}} + \text{bord} \equiv 0.$$

En se focalisant sur les fonctions $\varepsilon(x)$ qui s'annulent sur le bord avec leurs dérivées présentes dans le terme de bord, on obtient l'annulation du terme d'intérieur en facteur de $\varepsilon(x)$. Il en résulte une **relation de dépendance « linéaire » entre les $E_i(\mathfrak{L})$ et leurs dérivées**.

Le deuxième théorème de Noether

Énoncé original (sur la base de la traduction de Meersseman) :

Deuxième théorème de Noether

Si l'intégrale [d'action] est invariante [sous] un groupe [continu infini] $\mathfrak{G}_{\infty\rho}$ dépendant de [ρ] fonctions arbitraires et de leurs dérivées jusqu'à l'ordre σ, alors il y a ρ **identités entre les expressions lagrangiennes et leurs dérivées** jusqu'à l'ordre σ ; ici aussi la réciproque est valable.

- Ce théorème apporte des **identités**, donc valables que les équations d'E.-L. soient vérifiées ou non. Lorsque l'invariance sous le groupe infini $\mathfrak{G}_{\infty\rho}$ est postulée ou réclamée *a priori*, ces ρ identités sont autant de **contraintes** sur la formulation variationnelle recherchée.
- Noether donne deux exemples : l'invariance paramétrique et l'invariance propre à la relativité générale (qui a motivé le travail de Noether et a inspiré le nom d'**identités de Bianchi**) aux identités issues du 2^{e} théorème.

Deuxième théorème de Noether et sous-détermination

Le 2e théorème de Noether traduit une profonde **indétermination** dans la théorie, typique des **théories de jauge**.

La raison :

- Supposons que les champs $\psi^i(x)$ soient solutions des équations d'E.-L. pour des conditions aux limites données.

- Appliquons sur $\psi^i(x)$ une transformation continue $\psi^i(x) \longrightarrow \psi'^i(x')$ du groupe de symétrie $\mathfrak{S}_{\rho\infty}$ se réduisant à l'identité aux limites.

- Par l'invariance des lois, $\psi'^i(x)$ vérifie les **mêmes équations** d'E.-L. que $\psi^i(x)$ pour les **mêmes conditions aux limites**.

$\Longrightarrow$ La faute aux ρ identités de Bianchi ! Pour établir une unicité, il faut opérer un **choix de jauge** (i.e imposer ρ conditions sur les variables). On a une **liberté de jauge**.

Les lois de conservation impropres

- En spécifiant un certain $\varepsilon(x)$ dans la loi de transformation du groupe de symétrie infini et en utilisant l'identité de Bianchi, Noether obtient une identité de la forme

$$\boxed{\mathrm{d}_\mu(\mathrm{j}^\mu + \text{comb. « lin. » des } E_i(\mathfrak{L}) \text{ et leurs dérivées}) \equiv 0}$$

où j^μ est le courant de Noether correspondant. Les lois de conservation identiquement vraies qui prennent la forme ci-dessus sont des lois de conservation **impropres**.

- **Cas particulier important en théorie de jauge :** en spécifiant $\varepsilon =$ cte on parle de **transformation globale** (par opposition aux **transformations locales** dans le cas où ε est une fonction de x) et on obtient l'identité

$$\boxed{\mathrm{d}_\mu\left(\mathrm{j}^\mu + a_1^{i\mu} E_i(\mathfrak{L}) + \cdots + \mathrm{d}_{\mu_2} \ldots \mathrm{d}_{\mu_\sigma}\left[a_\sigma^{i\mu\mu_2\ldots\mu_\sigma} E_i(\mathfrak{L})\right]\right) \equiv 0}$$

La conjecture de Hilbert

- La conservation de l'énergie en « mécanique classique » est liée aux invariances par translations d'espace-temps. Dans le cadre de la relativité générale, Hilbert avait obtenu des lois de conservation impropres et avait conjecturé que c'était une caractéristique de la théorie.
- Noether a démontré cette conjecture en établissant les résultats généraux suivants :
  - les lois de conservation déduites d'un groupe de symétrie $\mathfrak{S}_{\rho\infty}$ sont toutes impropres (diapo précédente) ;
  - si un groupe de symétrie fini $\mathfrak{S}_{\tau}$ donne des lois de conservation impropres alors ce doit être un sous-groupe d'un $\mathfrak{S}_{\rho\infty}$.

$\Longrightarrow$ **Pas de loi de conservation propre de l'énergie en relativité générale**.

Un troisième théorème

Le deuxième théorème de Noether exploite l'annulation du terme d'intérieur uniquement. Or, l'identité de Noether

$$E_i(\mathfrak{L})\delta_\nu\psi^i - \mathrm{d}_\mu(\delta B^\mu + \delta\Lambda^\mu) \equiv 0$$

est une certaine combinaison de $\varepsilon(x)$ et de ses dérivées jusqu'à l'ordre $\sigma+1$ qu'on peut mettre sous la forme

$$A_{(0)}\varepsilon(x) + A^{\mu}_{(1)}\partial_\mu\varepsilon(x) + \cdots + A^{\mu_1\ldots\mu_\sigma}_{(\sigma+1)}\partial_{\mu_1}\ldots\partial_{\mu_\sigma}\varepsilon(x) \equiv 0.$$

Le fait que cela soit vrai pour toute fonction $\varepsilon(x)$ apporte donc $\sigma+2$ ensembles d'identités indépendantes du choix de $\varepsilon(x)$. Cela revient à annuler le terme de bord en plus du terme d'intérieur. C'est pourquoi K. Brading appelle ce résultat le **théorème de bord**, ou **théorème de Klein-Utiyama** (Klein et Utiyama ont suivi cette méthode pour dériver des identités : en relativité générale pour Klein, dans le cadre des théories de jauge pour Utiyama).

Plan

Matière en espace courbe

- **Hypothèse :** la matière « vit » dans un espace-temps lorentzien à **métrique fixée**. Elle est gouvernée par un lagrangien qui est une **densité scalaire** formée à partir de tenseurs (objets intrinsèques), y compris la métrique :

$$S_{\mathrm{m}} = \int \mathfrak{L}_{\mathrm{m}}(g_{\mu\nu}, g_{\mu\nu,\sigma}, \ldots, \psi^i, \psi^i{}_{,\mu}, \ldots)\, \mathrm{d}^4 x.$$

ψ^i : composantes des tenseurs dynamiques associés à la matière.

- On définit le **tenseur énergie-impulsion** de la matière $T^{\mu\nu}$ par

$$T^{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} E_{g_{\mu\nu}}(\mathfrak{L}_{\mathrm{m}}) \qquad \text{(procédure de Hilbert)}.$$

- S_{m} est invariante sous tout changement de coordonnées. Traduction active : l'ensemble des difféomorphismes infinitésimaux qui transforment **tous** les objets (**y compris les $g_{\mu\nu}$!**) dont dépend $\mathfrak{L}_{\mathrm{m}}$ laisse invariante l'action.

Symétries géométriques en espace courbe

L'invariance mentionnée conduit à une identité « à la Noether »

$$\underbrace{E_{g_{\mu\nu}}(\mathfrak{L}_\mathrm{m})}_{\neq 0\,(!!)}\,\delta_\mathrm{v} g_{\mu\nu} + E_i(\mathfrak{L}_\mathrm{m})\delta_\mathrm{v}\psi^i + \text{bord} \equiv 0.$$

- le 2e théorème apporte, quand les équations de la matière sont vérifiées :

$$\boxed{\nabla_\mu T^{\mu\nu} \doteq 0} \qquad (\nabla \text{ : connexion « naturelle » de Levi-Civita})$$

- Le 1er théorème ne s'applique que si $\delta_\mathrm{v} g_{\mu\nu} = 0$ (sinon $T^{\mu\nu} \doteq 0\,!$). Or :

$$\boxed{\delta_\mathrm{v} g_{\mu\nu} = 0 \iff (\text{la transformation est une } \textbf{isométrie} \text{ de g})}$$

$\Longrightarrow$ On obtient le groupe d'isométries continues (de dim. au plus 10 donc **finie**). S'il en existe, chaque générateur d'isométrie ξ (**champ de Killing**) apporte une loi de conservation (**propre !**)

$$\nabla_\mu J^\mu \doteq 0 \quad \text{avec} \quad \boxed{J^\mu = T^{\mu\nu}\xi_\nu} \iff \partial_\mu(\sqrt{-g}\,J^\mu) \doteq 0.$$

L'exemple de la relativité restreinte (RR)

En relativité restreinte, l'espace est plat et les champs de Killing engendrent le **groupe de Poincaré restreint** :

$$\text{4 translations} + \underbrace{\text{6 transformations de Lorentz}}_{\text{3 rotations}+\text{3 boosts de Lorentz}}$$

Dans un système de coordonnées (x^μ) associé à une base cartésienne orthonormée dans laquelle

$$(g_{\mu\nu}) = \mathrm{diag}(-1,+1,+1,+1)$$

les lois de conservation (**propres !**) sont

Transformations	Lois de conservation	Charges de Noether
Translation d'E.-T.	$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$	$P^\mu = \int T^{0\mu}\,\mathrm{d}^3x$
Transf. de Lorentz	$\partial_\mu (T^{\mu\nu}x^\lambda - T^{\mu\lambda}x^\nu)$	$L^{\mu\nu} = \int (T^{0\mu}x^\nu - T^{0\nu}x^\mu)\,\mathrm{d}^3x$

- P^0 : énergie totale — P^i : impulsion totale.
- L^{ij} : moment cinétique total — L^{i0} : position initiale du centre d'énergie.

La relativité générale (RG)

- En RG, contrairement à la RR, la métrique est **dynamique** : c'est elle qui imprime la gravitation. Il n'y a pas d'isométrie universelle (indépendante du modèle étudié). Quid des lois de conservation ?

- Métrique dynamique $\implies$ il **doit** s'ajouter à S_{m} une action universelle S_{g} (sinon $T^{\mu\nu} \doteq 0$!) régissant la métrique dans un espace vide de matière.

- L'action S_{g} forgée sur une densité scalaire est l'action d'Einstein-Hilbert

$$S_{\mathrm{g}}^{\mathrm{EH}} = \int \mathfrak{L}_{\mathrm{g}}^{\mathrm{EH}}\,\mathrm{d}^4x = \int \frac{1}{16\pi G} R\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^4x. \quad (R : \text{scalaire de Ricci}).$$

- Les équations d'E.-L. associées à la métrique donnent les équations d'Einstein qui couplent géométrie et matière :

$$E_{g_{\mu\nu}}(\mathfrak{L}_{\mathrm{m}} + \mathfrak{L}_{\mathrm{g}}) = 0 \iff G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}\,.$$

L'invariance générale de la RG

- Le fait que les actions sont forgées sur des **densités scalaires** dont **tous** les champs sont **dynamiques** permet d'affirmer que le groupe des diff. de M est un groupe d'invariance (infini) de la RG :

$$\boxed{\text{Diff}(M) = \text{groupe de symétrie « de jauge » de la RG}}$$

$\Longrightarrow$ les lois de la RG sont invariantes sous toutes les transformations continues de l'espace-temps ! (**invariance générale**).

- L'application du 2e théorème à l'invariance générale de l'action $S_{\mathsf{g}}^{\mathsf{EH}}$ produit les **identités de Bianchi contractées** (vraies en présence ou non de matière)

$$\boxed{\nabla_\mu G^{\mu\nu} = \partial_\mu E_{g_{\mu\nu}}(\mathfrak{L}_{\mathsf{g}}) + \Gamma^\mu_{\mu\lambda} E_{g_{\lambda\nu}}(\mathfrak{L}_{\mathsf{g}}) + \Gamma^\nu_{\mu\lambda} E_{g_{\mu\lambda}}(\mathfrak{L}_{\mathsf{g}}) \equiv 0}$$

Ces **4** identités sont à l'origine une simple conséquence du cadre géométrique de la RG. Ici, elles découlent de l'invariance sous le « $\mathfrak{S}_{4\infty}$ » des transformations $x^\mu \to x^\mu + \varepsilon\xi^\mu$ à **4** fonctions arbitraires $\xi^0, \xi^1, \xi^2, \xi^3$.

Le problème du tenseur énergie-impulsion

- Chaque champ ξ engendre une symétrie qui apporte une **loi de conservation impropre**

$$\boxed{\partial_\mu\left(\frac{\sqrt{-g}}{8\pi G}\,G^\mu{}_\nu\xi^\nu\sqrt{-g}+\mathfrak{t}^\mu\right)\equiv 0} \qquad (\star)$$

où $\mathfrak{t}^\mu$ est le courant de Noether associé à la symétrie. Puis :

$$G_{\mu\nu}=8\pi G T_{\mu\nu}\overset{(\star)}{\Longrightarrow}\boxed{\partial_\mu\left(\sqrt{-g}\,T^\mu{}_\nu\xi^\nu+\mathfrak{t}^\mu\right)\doteq 0}$$

- Le 2e théorème de Noether traite les 4 composantes ξ^0,ξ^1,ξ^2,ξ^3 comme des fonctions arbitraires indépendantes. En prenant le sous-groupe rigide des translations on obtient 4 lois de conservation

$$\boxed{\partial_\mu\left(\sqrt{-g}\,T^\mu{}_\nu+\mathfrak{t}^\mu{}_{(\nu)}\right)\doteq 0} \qquad (\nu=0,1,2,3).$$

Le problème du tenseur énergie-impulsion

Tentation : dans la loi de conservation

$$\boxed{\partial_\mu\left(\sqrt{-g}\,T^\mu{}_\nu + \mathfrak{t}^\mu{}_{(\nu)}\right) \doteq 0} \qquad (\nu = 0,1,2,3).$$

on est tenté d'interpréter $\mathfrak{t}^\mu{}_{(\nu)}$ comme la densité du tenseur énergie-impulsion du champ gravitationnel. Gros problèmes :

- $\mathfrak{t}^\mu{}_{(\nu)}$ n'est pas un tenseur (c'est un **pseudo-tenseur** ou « **complexe** ») fabriqué à partir d'un système de coordonnées (violation de la symétrie d'invariance générale) et peut être rendu nul en un point arbitraire...
- $\mathfrak{t}^\mu{}_{(\nu)}$ n'est pas invariant par ajout d'un terme de bord à S_g : $\mathfrak{t}^\mu{}_{(\nu)}$ est impacté par une manipulation sans incidence physique (il y a de nombreux pseudo-tenseurs sur le marché : Einstein, Lorentz, Dirac, Landau-Lifchitz, Weinberg, etc.).

$\Longrightarrow$ Il est **impossible de localiser l'énergie et l'impulsion gravitationnelles**. Elles ne peuvent avoir un sens que globalement sous certaines hypothèses (par ex. univers asymptotiquement plat pouvant être vu comme fermé). Intérêt : traiter champs de matière et de gravitation comme des entités échangeant énergie et impulsion.

En guise de conclusion : invariance générale et « réalité »

Une théorie, dans un espace-temps M, implique la présence de champs dynamiques $\mathcal{D}$ et (éventuellement) de champs ambiants $\mathcal{A}$ « ancrés » à M. Configuration :

$$\langle M, \mathcal{A}, \mathcal{D} \rangle.$$

Un difféomorphisme ϕ de M induit des transformations de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{D}$. Configuration transformée :

$$\langle M, \phi^* \mathcal{A}, \phi^* \mathcal{D} \rangle.$$

Pour qu'elle soit acceptable, il faut que $\phi^* \mathcal{A} = \mathcal{A}$ (isométrie dans le cas où $\mathcal{A}$ est une métrique, symétrie d'un champ électromagnétique ambiant, etc.). Mais en l'absence de champs ambiants, tout difféomorphisme est acceptable.

$\Longrightarrow$ **Dans une théorie sans champ ambiant**, non seulement les coordonnées sont des « entités indifférentes » mais aussi leur traduction active : les points de M n'ont pas de réalité physique. L'espace-temps n'est qu'une **représentation de l'espace des événements**, une figure tracée sur un papier. . .

Merci